江戸の数学教科書（3）

桜井進

集英社インターナショナル　ウェブ立ち読み

❖ 庶民が8次方程式を解く日本

ただし和算が大きく発展した背景には、もう一つ、中国からの影響があった。前にも少し触れた『算学啓蒙』の天元術である。

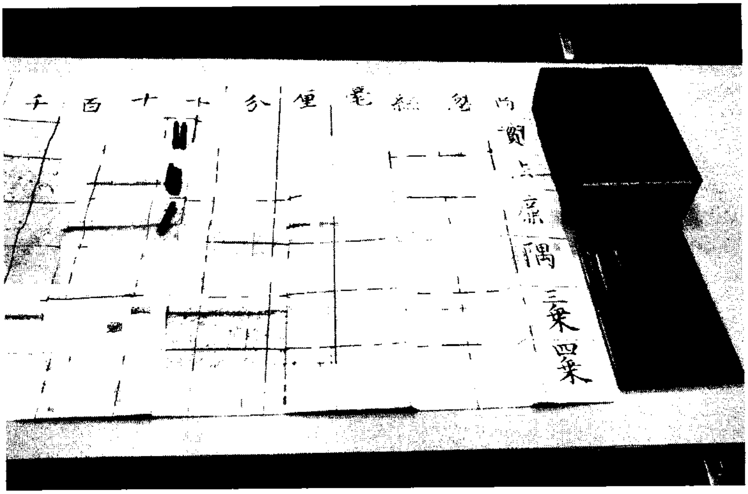
遺題継承によって高度化した問題は、ソロバンを使うそれまでの単純な計算方法では解けなくなった。そこで未知数 x を求める代数学が必要になったわけだ。

天元術は、未知数を「天元の一」として立てて、それを求める術である。今で言う「一元高次方程式」だ。

ただし、現在のように「$x^2+2x-15=0$」といった数式を書いて解くわけではない。「算木（さんぎ）」と「算盤」という道具を使う。ちなみにソロバンも漢字では「算盤」と書くが、これは別物で「さんばん」と読む。

算木と算盤は、江戸時代に入ってきたものではない。もっと以前の律令時代に、中国から伝来したと言われている。ソロバンも室町時代には日本にあったが、太閤検地の頃は算木を使っていたという説もあり、江戸時代を迎えるまではこちらのほうが計算道具として一般的だったようだ。

◀算木



算木の並べ方

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨	𝍩
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
𝍩𝍠	𝍩𝍡	𝍩𝍢	𝍩𝍣	𝍩𝍤	𝍩𝍥	𝍩𝍦	𝍩𝍧	𝍩𝍨	𝍪
		30	40	50	60	70	80	90	
		𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱	

算木は長さ5センチほどの木の棒で、麻雀(マージャン)をやる人なら「点棒(てんぼう)」のようなものをイメージすればいいだろう。色は黒と赤。それぞれ、プラスとマイナスの数を表すのに使う。図のように、「5」まではタテ向きにその本数だけ並べ、「6」から「9」まではヨコの1本を「5」と見なして、その下にタテ棒を並べるのが基本形だ。ローマ数字の表記法に似ていると言えるだろう。

	百	十	一	分	厘
商					
実	一	1	5		
法			2		
廉			1		

その算木を並べて計算を行うフィールドが、算盤である。碁盤のように升目が書かれており、場所ごとに意味が決まっている。先ほどの数式（$x^2+2x-15=0$）を算盤上に表したものを図にしたので、見てほしい。

ヨコ軸が位で、タテ軸は「商」が答え、「実」が定数項（ここでは－15）、「法」「廉」はそれぞれx、xの2乗の係数を表している。

この方程式を算盤上で解くやり方は、説明が難しい。簡単な問題の解き方は五八ページに記しておくので、興味のある方はそれを見てもらうことにしよう。

これは基本的に、代数演算ではなく、未知数に近似値を当てはめて計算するやり方だ。

たとえば2次方程式なら、中学で習った「解の公式」を覚えている人も多いだろう。公式そのものは忘れていても、そういうものが存在することは誰でも知っている。

この公式は、未知数xをxのまま式変形していく代数計算によって作ったも

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の
解の公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

のだ。その公式に方程式の係数を代入すれば、すぐに答えが出る。

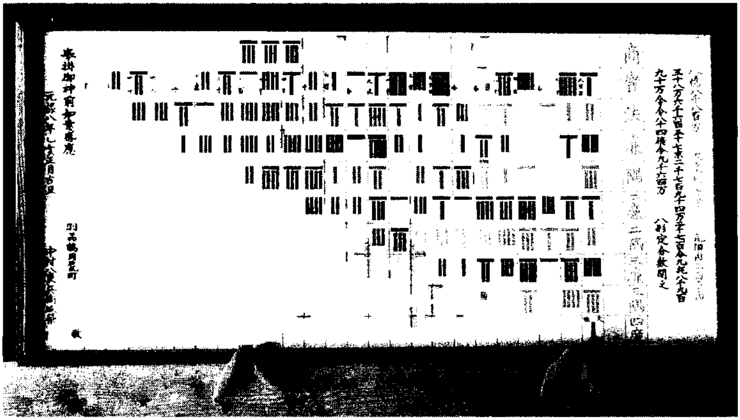
それに対して、算木と算盤で方程式を解く場合は、未知数に「だいたいこれぐらいかな」と思われる数字を当てはめて数値計算をしながら、正解を絞り込んでいくような感じだと思えばいいだろう。

もちろん、ただの当てずっぽうで数字を入れるわけではない。うまく近似値を探っていけるような仕組みになっている。

原始的なやり方だと思う人もいるだろうが、算木を侮ってはいけない。中学で習う「解の公式」が通用するのは2次方程式だけだが、この天元術では何次方程式でも解くことができた。

たとえば山形県鶴岡(つるおか)市にある遠賀(おが)神社の算額（1695年）には、なんと8次方程式の問題と解が書かれている。「x^8=3866372794270989900084096」という問題だ。度肝を抜かれるほどのスケールである。また、その答えが888になるというあたりも、洒落(しゃれ)っ気があって面白い。

これを見れば、いかに算木と算盤が優れた計算道具だったかがわかるだろう。現代の電卓も8乗の計算はできるが、24桁まで表示できるものは滅多にない。



遠賀神社算額(復元)遠賀神社 山形県鶴岡市遠賀原 元禄8年(1695) 中村八郎兵衛政栄 奉納

算木の計算方法

$ax^2+bx+c=0$

商	x
実	c
法	b
廉	a

商	x
実	c
法	$ax+b$
廉	a

商	x
実	$(ax+b)x+c$
法	$ax+b$
廉	a

実が0になればxが解である。

$x^2+2x-15=0$の場合

まず、仮に$x=3$と考えて、商の欄に3を置く。

商	3
実	-15
法	2
廉	1

商	3
実	-15
法	$3\times1+2=5$
廉	1

商	3
実	$6\times3-15=0$
法	2
廉	1

実が0になったので$x=3$は解である。

また、ふつうの庶民が8次方程式に取り組んでいたというのも驚くべき事実だ。当時の世界でこんなことをやっていたのは、日本だけである。もしヨーロッパの庶民にこの問題を出しても、「どうして自分が8次方程式なんか解かなきゃいけないんだ？」と怪訝(けげん)な顔をされただろう。そんなものにトライする理由がない。

しかし日本人は、この何の役にも立たない問題を、知的好奇心だけで計算した。解ければ、算額にして誇示するほどの達成感を得る。数学が「娯楽」として成り立っていたことを、この算額ほど雄弁に物語るものはないかもしれない。

❖「筆算」を作り出した算聖・関孝和

ただ、算木と算盤は8次方程式さえ解けるとはいえ、その作業がかなり厄介(やっかい)なものであることは間違いない。

「どうして紙に字を書いて計算しなかったのか」

と不思議に思っている人も多いだろう。天元術を作った中国は、漢字や紙を

発明した国だ。北京五輪の開会式でも、それを誇らしげに強調していた。ところが中国では、その偉大な発明を数学に使うことを考えなかったようだ。

しかし江戸時代の日本では、算木と算盤でやっていた方程式の計算を、筆と紙を使ってやる方法を編み出した人物がいた。

それが、かの関孝和である。

関 孝和
（一関市博物館所蔵）

算木と算盤を使う天元術には、計算が簡便ではないという以外にも、重大な難点があった。変数が一つの一元方程式（つまりxだけの方程式）しか解けないのだ。取り組む問題が高度になれば、当然、yやzなど複数の変数を使う方程式が必要になる。中国の手法では、そこから先に進めない。

それを前進させたのは、先ほど紹介した「遺題継承」のシステムだった。

天元術を熱心に研究したことで知られる和算家・沢口一之（さわぐちかずゆき）の『古今算法記（ここんさんぽうき）』（1671年）には、巻末に15問の遺題が掲げられている。いずれも多変数の方程式を必要とする問題なので、中国式の天元術では解けなかった。その解決を、沢口は世の和算家た

関孝和の傍書法

西洋式	傍書法
$a+b$	$\begin{array}{\|l} a \\ b \end{array}$
$a-b$	$\begin{array}{\|l} a \\ \cancel{b} \end{array}$
$a \times b$	$\|ab$
$a \div b$	$b\|a$
$2a-3b$	$\begin{array}{l} \|\|a \\ \cancel{\|\|\|}b \end{array}$
$a \div (b+c)$	$\begin{array}{c\|l} b & a \\ c & \end{array}$

ちに託したのである。

そして、『古今算法記』の遺題にすべて答えたのが、関孝和だった。彼はそれを、1674年に出した『発微算法（はつびさんぽう）』という著書の中で発表している。

そこで使われたのが、「傍書法」という手法だ。

関は、紙に「甲」「乙」といった文字を書き並べて計算するやり方を工夫することで、多変数の方程式を解けるようにした。つまり「筆算」を発明したわけだ。

天才和算家として知られる関だが、その数ある業績の中でも、これは最大のものだと言っていいだろう。これによって、和算は先輩の中国を抜き、本格的な高等数学として発展し始めたのである。

関の生まれた年や場所は、諸説あってはっきりしない。生年は1640年前後、出生地は現在の群馬とも東京とも言われている。

かつては「1642年生まれ」というのが定説だったが、これは後年の歴史家による捏造（ねつぞう）だったようだ。どうやらその歴史家は、日本が誇るこの天才和算家を、かのニュートンと同じ年の生まれということにしたかったらしい。歴史の「奇縁」を演出したかった気持ちはわからなくもないところだ。

いずれにしろ、関が生まれたときには、すでに『塵劫記』が存在していた。多くの和算家と同様、少年時代の関もこの本で算術を勉強し始めたという。手にしてから1日か2日ですべての問題を解いたという逸話もあるが、これも真偽のほどはわからない。

算術の師匠は、前述したとおり、毛利重能の門弟だった高原吉種だった。やがて、甲府藩主の徳川綱重、徳川綱豊（のちの6代将軍家宣）に仕えた関は、算術の力量を認められて勘定吟味役となる。そして、綱豊が5代将軍綱吉の養子になったときに、直参の旗本となった。

毛利重能や吉田光由もそうだったように、それまでの和算は京都や大坂を中心に発展していたが、関の登場によって、これ以降は江戸がその中心地となる。傍書法を確立した『発微算法』も、そこで書かれた。

ただし関が『発微算法』の中で、高らかに「筆算の誕生」を宣言したというわけではない。これはあくまでも『古今算法記』の遺題を解くことを目的とした本なので、解にいたるまでのプロセスを省略した部分が多く、傍書法そのものは表に出てこないのだ。それもあって、それが本当に正解なのかどうかを疑問視する声もあったという。

しかし『発微算法』の出版から11年後の1685年、関の弟子が『発微算法演段諺解』という解説書を書き、師匠の解が正しいことを証明した。その弟子が、建部賢弘である。関ほど名前は知られていないが、彼もまた江戸時代を代表する和算家のひとりだ。

建部については次の章で詳述するが、関のさまざまな業績が後世に伝わったのは、彼を含む門弟たちの努力によるところが大きい。というのも、関が生前に自ら執筆して出版された著作は『発微算法』ただ一冊だけだからだ。

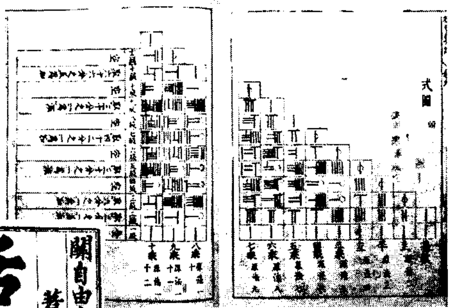
関にとっては、目の前の問題を解き、純粋に数学の世界を探究することが大事だったのだろう。地位や名誉などにはあまり関心がなかったのである。

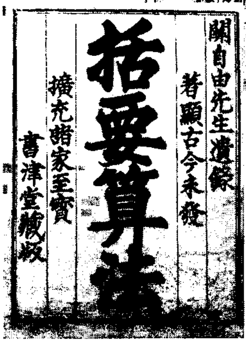
❖「ベルヌーイの公式」はタッチの差で関孝和が先に発見

とはいえ、出版にいたらなかった関の遺稿は膨大にある。彼の著作の大半は、それを門弟たちが整理して出版したものだ。

代表作のひとつである『括要算法』も、そうやって世に送り出された。

関が没したのは1708年、『括要算法』の出版は4年後の1712年である。





その内容は、関が1680年代の前半に書いたものだった。執筆から30年近く経ってから、ようやく日の目を見たのである。

実は、その執筆や出版の時期には重要な意味がある。この本の中で、関は世界に先駆けてある法則を発見しているからだ。

その法則が日本以外で最初に発表されたのは、1713年のことだった。スイスの数学者ヤコブ・ベルヌーイが『推論術』という本の中で取り上げた法則だ。そのため、この法則は数学の世界で「ベルヌーイの公式」もしくは「ベルヌーイ数」と呼ばれている。

高校の数学の授業で「数列の和の公式」を習った記憶のある人は多いだろう。自然数の和 $1+2+3+\cdots+n=n(n+1)/2$、自然数の2乗の和 $n(n+1)(2n+1)/6$、自然数の3乗の和 $n(n+1)/2$ の2乗 など、いろいろな公式がある。

ベルヌーイの公式は高校では習わないが、これも数列の和を求めるためのものだ。「べき乗数列の和の公式」である。

関・ベルヌーイの公式
（関 1712年　ベルヌーイ 1713年 発表）

$$\sum_{i=0}^{n} i^k = \sum_{j=0}^{k} {}_kC_j B_j \frac{n^{k+1-j}}{k+1-j}$$

混同されやすいが、流体力学でよく使う「ベルヌーイの定理」はこれとは別。こちらはヤコブ・ベルヌーイの甥にあたるダニエル・ベルヌーイが発見した。ちなみにダニエルの父（ヤコブの弟）ヨハン・ベルヌーイも有名な数学者だった。

ベルヌーイの公式については、かなり難解な話になるので、上に結論だけを掲げておくことにしよう。

ここで大事なのは、『括要算法』に書かれた法則がこの公式と正確に対応していることだ。ヨーロッパの最先端の数学についてまったく情報のない鎖国下の日本で、関は地道な計算をくり返すことで「ベルヌーイの公式」にたどり着いていた。

もちろん、関の門弟たちは、遠い海の彼方で師匠と同じテーマに取り組んでいる数学者がいることなどつゆほども知らなかっただろう。しかし実際には、現代の科学技術開発と同じような激しい先陣争いが、洋の東西で繰り広げられていたわけだ。

そして彼らは、まさに「タッチの差」でヨーロッパに勝った。

ベルヌーイの『推論術』が世に出たのは、『括要算法』のわずか1年後である。ベルヌーイは1705年に没しており、そちらも近親者が本人の死後に遺稿をまとめて出版したものだった。

どちらも出版されたのが本人の死後なので、生前の関とベルヌーイが何年にその法則を発見したのかは定かではない。先述のとおり、関は1680年代の前半にそれを書いたと思われるが、ベルヌーイのほうは不明だ。

しかし当時の西欧には、すでにさまざまな分野の科学者たちが「最初の発見者」となるべく競争する意識があった。したがって、自分の発見を長く公表せずに置いておくとは考えにくい。

したがって、おそらくベルヌーイの発見は1705年に亡くなる直前だっただろうと想像される。つまり、実質的な発見時期も、ベルヌーイより関のほうが早かったということだ。

だとすれば、「ベルヌーイの公式」は「関の公式」と呼ばれて然るべきだろう。せめて、ほぼ同時に発見した両者の功績を讃えて「関・ベルヌーイの公式」と呼びたい。少なくとも、われわれ日本人はそう呼ぶべきだろうと私は思っている。

❖「算数の心に従うときは泰し」

外国の数学者たちと先陣争いをしている意識はなかったが、和算の世界に競争がまったくなかったわけではない。

江戸時代の日本には、さまざまな算術の「流派」があった。華道や茶道などの「家元制度」と同じように、師匠が自分の弟子に奥義を伝授し、それをマスターした者を「免許皆伝」とするシステムがあったのだ。

したがって当然、それぞれの流派はお互いにライバル意識を持つ。その中でも関孝和の「関流」は和算界の頂点をきわめた一派だが、それ以外にも、最上流、中西流、宅間流、中根流、千葉流などの多くの流派があった。

ある流派のトップが書いた算術書の中には、「わが答案は○○派よりも短い。したがって自分のほうが優れている」などと、あからさまに他派と比較した文言を記し、「勝利宣言」をしているものもある。同じ問題でも、より簡潔なプロセスで解答を導くほうが偉いというのは、「できるだけエレガントに解きたい」という数学者らしい発想だ。

こうした競争意識のために、逆に重要な発見を公開しないこともあった。よその流派に盗まれないよう、「秘伝」として自分の弟子だけに伝授したのである。このあたりの感覚は、西洋とはかなり違うと言えるだろう。

そういったことも含めて、和算は西洋の数学とは異なる形で発達した。算額を奉納して神仏に感謝するというところからして、西洋とは感覚が違う。

その独特な数学観を端的に表現しているのが、冒頭にも記したが、関の弟子である建部の言葉だろう。彼が多くの弟子に渡した『不休綴術』に記した言葉が、私は大好きだ。

「算数の心に従うときは泰し、従わざるときは苦しむ」

……算数の心。じつに日本人らしい感覚ではないだろうか。

「数学なんて役に立たない」とうそぶき、その面白さに目を向けない人たちは、それが無機質な記号の羅列にしか見えないのだろう。しかしその「行間」には数学の世界でしか感じられない「心」が込められている。

江戸時代の庶民はそれを読み取る感性があったからこそ、数学を趣味として楽しむことができたに違いない。

ならば現代の日本人も、その「心」を感じ取ればいい。社会全体の数学力を

高めたいのであれば、まず「算数の心」を知るための工夫から始めるべきだろう。

われわれが学校で習う算数や数学は、基本的に西洋から輸入したものだ。だから大半の日本人は、それをある種の「外国語」のように感じている。数学が苦手な人は、しばしば「数式を見ると頭が痛くなる」と言うが、それはアルファベットで書かれた外国語に対する拒絶感と似ているような気がしてならない。無意識のうちに、「これは自分たち日本人の学問ではない」と思い込んでいるわけだ。これでは「算数の心」など感じられるはずがない。

しかしここまで見てきたように、西洋から数学が流入する以前から、日本にはそれがあった。単に「存在した」というだけではない。江戸時代の日本では、世界に類を見ないほど多くの数学書が出版され、関孝和のように西洋の数学者をしのぐ業績を残した和算家も出現した。

関の業績は「関・ベルヌーイの公式」の発見だけではない。代数方程式、ニュートンの近似解法、極大極小理論、終結式と行列式、近似分数、そして次章で取り上げる円周率の計算など、数多くの理論を彼は独学で作り上げた。「西洋の学問」としての数学を勉強したわけではない。

もちろん、その根っこには中国の数学がある。しかし関は「筆算」の発明によって中国の数学を乗り越え、そこから日本独自の数学が発展した。いわば「日本語の数学」が始まったのである。

❖日本人にフィットする新たな「傍書法」を考えよう

その意味で、関の考案した「傍書法」は和算を象徴するものだと言えるだろう。今の日本人がそれを使うことはできないが、オリジナルな筆算のスタイルを作り上げるだけの数学的センスが日本人にはある。そのことに、われわれはもっと注目してもいいのではないだろうか。

そもそも、世界共通となっている現在の数式の書き方が確立したのは、20世紀に入ってからのことだ。それ以前は、証明問題のプロセスを文章で説明していた。それをすべて記号だけで書くスタイルにしたのは、フランスのニコラ・ブルバキである。

ちなみに、ブルバキという名前の個人は存在しない。フランスの若手数学者集団が１９３４年に解析学の教科書を編纂するときに作り出した架空の数学者

のペンネームだ。ブルバキは現代数学をまとめた何十巻にも及ぶ教科書を書き、やがてそれが世界各国のお手本となった。

だが、その書式はあらゆるプロセスを記号化し、できるだけ短く表現することを目指しているので、合理的と言えば合理的だが、とっつきにくいと言えばとっつきにくい。いわば暗号のようなものだから、まずさまざまな約束事を覚えなければ理解できないし、慣れるまでにそれなりのトレーニングが必要になる。

そのため大学で理系学部に進んだ学生でも、あの数学特有のフォーマットに馴染めないという人は少なくない。一般の人が「頭が痛くなる」と言うのも当然だろう。

しかしその書式そのものは昔からあったわけではなく、したがってそこに数学の本質があるわけでも何でもない。そんなもののために数学が敬遠されているのだとしたら、こんなに不幸なことはないと思う。

なぜなら、数式を見ると頭が痛くなる人々は、その書式が苦手なだけであって、実は数学的なセンスを十分に持っているかもしれないからだ。もともと日本人は『塵劫記』がベストセラーになるぐらいの数学好きなのだから、現代の

日本人に数学嫌いが多いというのは不自然である。

だから私は、本来日本人が持っているはずの数学的センスを掘り起こすために、「日本人が頭の痛くならない数式の書き方」を作ってもいいのではないかと考えている。江戸時代の関孝和にやれたのなら、現代のわれわれにもやれないことはないだろう。

西欧人はアルファベットと数字しか使えないが、日本人は漢字、ひらがな、カタカナ、ローマ字などさまざまな文字を使うことができる。さらに縦書きにも横書きにも対応できるのだから、西洋流にこだわる必要はない。具体的なアイデアがあるわけではないが、たとえばアラビア数字と漢数字を使い分けるなど、あらゆる文字や表記を駆使した日本人にとってわかりやすい書き方がありそうな気がしてならないのである。

ちょうど、2008年は関孝和の没後300年というメモリアルイヤーだった。その業績を振り返り、「日本人と数学」の関係を考え直す良い機会だろう。

関の作った傍書法は、西洋の数学が入ってくるまで約200年間にわたって使われ続けた。ブルバキの表記法が生まれてからまだ1世紀も経っていないことを考えれば、臆(おく)することはない。これから何百年も通用する新しい数学のや

り方を編み出すことが、日本人にはできるはずだ。
私も考えてみるつもりだが、われこそはと思う人は、自分でも考えてみてもらいたい。それを本書における私からの「遺題」とすることにしよう。

江戸の数学教科書　桜井進著

発行・集英社インターナショナル　発売・集英社
定価 1,260 円（税込）
ISBN 978-4-7976-7187-2

ウェブでのご注文は [こちらにどうぞ！]